



Określenie liczebności zbiorów liczbowych skończonych



Określenie liczebności zbiorów liczbowych skończonych

Źródło: dostępny w internecie: Unsplash.com, licencja: CC BY 3.0.

W tym materiale będziemy odpowiadać na pytania dotyczące liczebności zbiorów różnych rodzajów liczb. Trzeba będzie przy tym pamiętać, aby nie liczyć dwukrotnie tej samej liczby.



Źródło: dostępny w internecie: Pexels.com, licencja: CC BY 3.0.

Aby lepiej zrozumieć problem, zapoznaj się z poniższą anegdotą.

André Ampère, francuski fizyk i matematyk (1775–1836), miał dwa koty – dużego i małego – które bardzo lubił. Przeszkadzały mu jednak ciągłym drapaniem do drzwi, więc w końcu kazał zrobić w drzwiach dwa otwory dla kotów – jeden duży – dla dużego, drugi mały – dla mniejszego, żeby mogły wchodzić i wychodzić same.

Jaki stąd wniosek? Duży kot i mały kot to po prostu kot. Podobnie z naszymi liczbami – jeśli ktoś poprosi nas o wypisanie

wszystkich liczb naturalnych mniejszych od pięciu, to możemy zapisać liczby tak:

0, 1, 2, 3, 4

Albo na przykład tak:

0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4.

I w pierwszym i w drugim przypadku jest tylko pięć liczb naturalnych mniejszych od pięciu.

1. Interaktywna treść merytoryczna

2. Multimedia

3. Zestaw ćwiczeń interaktywnych

4. Słownik

Twoje cele

- Określisz ile liczb jest w danym zbiorze.
- Wykorzystasz cechy podzielności liczb w zadaniach.
- Ustalisz liczbę elementów **zbioru skończonego**.

W matematyce często używanym pojęciem jest **zbiór**. Zbiór może składać się z figur geometrycznych (np. zbiór trójkątów), liczb (np. zbiór liczb naturalnych), przedmiotów (np. zbiór narzędzi ogrodniczych), a nawet ludzi (np. zbiór uczniów szkoły podstawowej).

Trójkąty, liczby, narzędzia ogrodnicze, czy osoby należące do danego zbioru to **elementy** tego zbioru. Dany element może należeć do zbioru lub nie. Na przykład do zbioru kwadratów nie należy okrąg.

Zbiór może mieć nieskończenie wiele elementów (np. zbiór liczb naturalnych parzystych) lub być **zbiorem skończonym**. Czyli mieć określoną liczbę elementów (np. dziesięć).

Zbiory najczęściej oznaczamy dużymi literami, np. A , B , C , N . Np. elementami zbioru $A = \{a, b, c\}$ są: a , b , c .

Przykład 1

Oznaczmy przez R zbiór reszt z dzielenia liczb naturalnych dodatnich przez 5.

Reszty te mogą być równe: 0, 1, 2, 3, 4. Są to elementy zbioru R . Zapisujemy:

$$R = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Zbiór ten ma 5 elementów.

Kolejność zapisu elementów zbioru nie ma znaczenia, ale elementy nie mogą się powtarzać. Np.

$$R = \{0, 1, 2, 3, 4\} = \{4, 0, 2, 3, 1\}$$

Jeśli zbiór ma dużo elementów, to nie zawsze musimy je wszystkie wypisać. Jeżeli nie budzi to wątpliwości, możemy zastosować skrócony zapis z pomocą wielokropka.

Przykład 2

Zbiór kolejnych liczb naturalnych mniejszych od 20 możemy zapisać w postaci:
 $\{0, 1, 2, 3, \dots, 19, 20\}$

Często jest potrzeba ustalania z ilu elementów składa się dany zbiór (czyli określenia jego liczebności). Pokażemy teraz kilka przykładów wyznaczania liczebności zbiorów.

Ograniczymy się tylko do zbiorów liczbowych.

Przykład 3

Ustalimy, ile jest ułamków właściwych o mianowniku 9.

Ułamek właściwy, to ułamek, którego licznik jest mniejszy od mianownika. Wypiszemy wszystkie ułamki spełniające warunki zadania i policzymy ile ich jest.

$$\left\{ \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{3}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{6}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9} \right\}$$

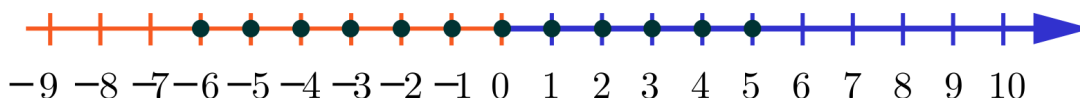
Jest 8 ułamków właściwych o mianowniku 9.

Możemy powiedzieć, że zbiór ułamków właściwych o mianowniku 9 składa się z 8 elementów.

Przykład 4

Określimy, ile jest liczb całkowitych, które są większe od (-7) , ale mniejsze od 6.

Aby obliczyć ile jest takich liczb, zaznaczymy je na osi liczbowej, wypiszemy i policzymy.



Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

$$\{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

Jest 12 liczb spełniających warunki zadania.

Zbiór liczb całkowitych większych od (-7) , ale mniejszych od 6 składa się z 12 elementów.

Przykład 5

Obliczymy, ile jest liczb naturalnych dwucyfrowych.

Oznaczmy przez D zbiór liczb naturalnych dwucyfrowych.

$$D = \{10, 11, 12, \dots, 98, 99\}$$

Najmniejsza z liczb dwucyfrowych to 10, a największa to 99.

Wypiszemy wszystkie liczby naturalne dodatnie jednocyfrowe i dwucyfrowe:

$$1, 2, 3, \dots, 9, 10, \dots, 98, 99$$

Wśród tych liczb dziewięć to liczby jednocyfrowe. Zatem $99 - 9 = 90$.

Czyli liczb naturalnych dwucyfrowych jest 90.

Ważne!

- W zbiorze kolejnych liczb naturalnych $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ jest n elementów.
- W zbiorze kolejnych liczb naturalnych $\{k, k + 1, \dots, n - 1, n\}$ jest $n - k + 1$ elementów.

Przykład 6

Ustalimy liczebność zbioru $\{5, 6, 7, \dots, 304\}$.

Skorzystamy z podanego wyżej wzoru.

$$304 - 5 + 1 = 304 - 4 = 300$$

Liczebność podanego zbioru jest równa 300.

Przykład 7

Ustalimy, ile jest liczb naturalnych dwucyfrowych podzielnych przez 3.

Najmniejsza liczba dwucyfrowa podzielna przez 3 to 12. Największa to 99.

Aby wyznaczyć, ile jest wszystkich takich liczb, niestety nie możemy skorzystać ze wzoru takiego, jak w poprzednim przykładzie. Bowiem kolejne liczby podzielne przez 3, to nie są kolejne liczby naturalne.

Zauważmy jednak, że kolejny element w zbiorze liczb dwucyfrowych podzielnych przez 3 jest większy od poprzedniego o 3.

$$\{12, 15, 18, \dots, 96, 99\}$$

Wynika z tego, że co trzecia liczba dwucyfrowa jest podzielna przez 3. Z przykładu 5 wiemy, że liczb dwucyfrowych jest 90.

$$90 : 3 = 30$$

Zatem, ponieważ 3 jest dzielnikiem liczby 90. Liczb dwucyfrowych podzielnych przez 3 jest więc 30.

Przykład 8

Ustalimy, ile liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach można utworzyć z cyfr 0, 1, 2.

Wypiszemy wszystkie takie liczby pamiętając, że cyfrą setek nie może być 0:

102, 120, 201, 210

Z cyfr 0, 1, 2 można utworzyć cztery liczby trzycyfrowe o różnych cyfrach.

Zbiór liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach utworzonych z cyfr 0, 1, 2 składa się z 4 elementów.

Przykład 9

Określimy liczbę elementów zbioru zawierającego liczby naturalne pierwsze mniejsze od 2.

Liczby naturalne mniejsze od 2 to 0 i 1. Żadna z tych liczb nie jest liczbą pierwszą. W zbiorze zawierającym liczby naturalne pierwsze mniejsze od 2 nie ma żadnego elementu. O takim zbiorze mówimy, że jest **zbiorem pustym**.

Ważne!

Zbiór niezawierający żadnych elementów to **zbiór pusty**.

Notatki

Miejsce na Twoje notatki

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Zapoznaj się z prezentacją. Rozwiąż najpierw samodzielnie zamieszczone tam zadania i dopiero wtedy porównaj z proponowanymi rozwiązaniami.

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.



Kliknij, aby uruchomić w trybie pełnoekranowym.

Polecenie 2

Ile różnych liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 5 można utworzyć z cyfr 3, 5, 7?

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Polecenie 3

Ile jest różnych liczb naturalnych czterocyfrowych, których suma cyfr jest równa 3?

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Polecenie 4

Ile jest liczb naturalnych dwucyfrowych, których iloczyn cyfr jest sześcianem liczby naturalnej?

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Zestaw ćwiczeń interaktywnych

Ćwiczenie 1

Wskaż ile jest liczb całkowitych nie mniejszych od (-3) i nie większych od 3 ?

☐ 5

☐ 3

☐ 6

☐ 7

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2

Wskaż ile jest wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych?

☐ 9000

☐ 10000

☐ 8999

☐ 9999

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3

Połącz w pary zbiór i jego liczebność.

Zbiór reszt z dzielenia liczb naturalnych dodatnich przez 20.

21

Zbiór liczb pierwszych mniejszych od 60

17

Zbiór ułamków właściwych o mianowniku 20.

20

Zbiór $A = \{4, 5, 6, 7, \dots, 23, 24\}$.

19

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4

Wskaż, które zdanie jest prawdziwe, a które fałszywe.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 11 jest więcej niż 80.	☐	☐
Liczb trzycyfrowych, których suma cyfr jest równa 2 jest mniej niż 4.	☐	☐
Liczb całkowitych ujemnych większych od (-10) jest 9.	☐	☐
Jest jedna liczba naturalna złożona mniejsza od 4.	☐	☐
Liczb, które są wielokrotnościami 13 jest nieskończenie wiele.	☐	☐

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5

Przeciągnij zbiory w odpowiednie pola.

Zbiory skończone

Zbiór wielokrotności liczby 1.

Zbiór liczb czterdziestocyfrowych.

Zbiory nieskończone

Zbiór dzielników liczby 100000.

Zbiór liczb mniejszych od 3.

Zbiór wielokrotności liczby 0.

Zbiór ułamków właściwych o mianowniku 65.

Zbiór reszt z dzielenia liczb naturalnych przez 13.

Zbiór liczb naturalnych nieparzystych.

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6

Uzupełnij zdania, wpisując odpowiednie liczby.

Są liczby naturalne dwucyfrowe podzielne przez 4.

Jest liczb naturalnych dwucyfrowych podzielnych przez 7.

Jest liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 100.

Jest liczba naturalna trzycyfrowa podzielna przez 500.

Jest liczb naturalnych pięciocyfrowych podzielnych przez 100000.

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7

Zapisz ile liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 5 można utworzyć z cyfr 0, 1, 5?

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8

Zapisz ile jest liczb naturalnych dwucyfrowych, których suma cyfr jest większa od 12?

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Słownik

zbiór skończony

zbiór składający się z określonej liczby elementów.

zbiór pusty

zbiór niezawierający żadnych elementów.

Bibliografia

Conway John H., Guy Richard K., (1999), *Księga liczb*, Warszawa: Wydawnictwo Naukowo - Techniczne,